

1 Diskrete Quellen

Alphabet $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$
 Verteilung $(p(x_i)) = (p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_N))$ mit $0 \leq p(x_i) \leq 1$.
 Vereinbarung

$$\sum_i := \sum_{i=1}^N, \quad \sum_j := \sum_{j=1}^M$$

Satz der vollständigen Wahrscheinlichkeit $\sum_i p(x_i) = 1$.
 Unbestimmtheit/Entropie/Informationsgehalt

$$H_i = \text{ld} \frac{1}{p(x_i)} = -\text{ld} p(x_i)$$

Mittlerer Informationsgehalt

$$H_m = \sum_i p(x_i) \text{ld} \frac{1}{p(x_i)}$$

Bei Gleichverteilung gilt:
 $p(x_i) = \frac{1}{N}, H_Q = H_0 = \text{ld} N$

1.1 Markow-Quellen

Entropie $H_Q = H_M =$

$$\sum_{i,j} \overline{p(x_i)p(x_j|x_i)} \text{ld} \frac{1}{p(x_j|x_i)}$$

Stationärer Fall $p(x_i) = \overline{p(x_i)}$:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (p(x_j|x_i))^n = \overline{p(x_i)}$

1.2 Verbundquellen

Zwei diskrete Quellen X und Y mit Verbundwahrscheinlichkeiten $(p(x_i, y_j)), i \in \{1, 2, \dots, N\}, j \in \{1, 2, \dots, M\}$ bilden eine Verbundquelle (X, Y) .
 Verbundwahrscheinlichkeiten

$$p(x_i, y_j) = p(x_i) \cdot p(y_j|x_i) = p(y_j) \cdot p(x_i|y_j)$$

Verbundentropie
 $H(X, Y) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y)$

$$H(X, Y) = \sum_{i,j} p(x_i, y_j) \text{ld} \frac{1}{p(x_i, y_j)}$$

$$H(X) = \sum_i p(x_i) \text{ld} \frac{1}{p(x_i)}$$

$$H(Y) = \sum_j p(y_j) \text{ld} \frac{1}{p(y_j)}$$

$$H(Y|X) =$$

$$\sum_{i,j} p(x_i)p(y_j|x_i) \text{ld} \frac{1}{p(y_j|x_i)}$$

$$H(Y|X) = \sum_{j,i} p(y_j)p(x_i|y_j) \text{ld} \frac{1}{p(x_i|y_j)}$$

In den Matrix-Darstellungen $(p(x_i, y_j)), (p(x_i|y_j))$ und $(p(y_j|x_i))$ läuft i zeilenweise und j spaltenweise.

2 Quellkodierung

Mittlere Kodewortlänge

$$l_m = \sum_i p(x_i) l_i$$

Gleichmäßiger Kode $l = \lceil \text{ld} N \rceil$

dekodierbar $l_m \geq H_m$ oder auch $\sum_i 2^{-l_i} \leq 1$

annähernd redundanzfrei $H_m \leq l_m < H_m + 1$

$2^{-l_i} \leq p(x_i) < 2^{-l_i+1}$

redundanzfrei $l_m = H_m \Leftrightarrow p(x_i) = 2^{-l_i}$

$$\text{Koderedundanz } R_K = l_m \cdot [H_K] - H_Q \geq 0$$

3 Kanäle

3.1 Diskrete Kanäle

Quelle X , Senke Y
 Transinformation $H_T = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$

$$= H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

Quelleninformationsfluß

$$I_Q = f_Q H_Q$$

Quellenkodeinformationsfluß

$$I_{KQ} = f_Q l H_K$$

$$\text{Kanalkodeinformationsfluß } I_{KK} = f_Q (l + \Delta l) H_K = f_Q n H_K$$

Kanalsymbolfrequenz f_K
 Schrittgeschwindigkeit v_s

$$f_K = v_s$$

Übertragungsgeschwindigkeit

$$v_{\ddot{u}} = I_K = v_s H_K$$

Transinformationsfluß

$$I_T = v_s H_T$$

Kanalkapazität

$$C = \max \{I_T\} = 2B \max H_T$$

Ungesicherte Übertragung

$$I_K = I_{KQ}, \quad v_s = \frac{I_{KQ}}{H_K} = f_Q l$$

Gesicherte Übertragung

$$I_K = I_{KK} = f_Q n H_K \text{ bzw. } I_T = I_{KQ}$$

$$v_s = \frac{I_{KQ}}{H_T} = f_Q l \frac{H_K}{H_T} = f_Q n$$

$$I_{KK} = f_Q \left(l \frac{H_K}{H_T} \right) H_K = f_Q n H_K$$

3.2 Analoge Kanäle

$$H(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \text{ld} \frac{1}{f(x)} dx - \text{ld} \Delta x$$

3.2.1 Normalverteilung

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi P}} \exp -\frac{x^2}{2P}$
 $P_x \dots$ mittlere Nutzsignalleistung
 $P_z \dots$ mittlere Störsignalleistung

$$H(X) = \frac{1}{2} \text{ld}(2\pi e P_x)$$

$$H(Y|X) = \frac{1}{2} \text{ld}(2\pi e P_z)$$

$$H(Y) = \frac{1}{2} \text{ld}(2\pi e (P_x + P_z))$$

$$H_T = \frac{1}{2} \text{ld} \left(1 + \frac{P_x}{P_z} \right)$$

Rauschabstand $r = 10 \log \frac{P_x}{P_z}$

$$C = 2B \frac{1}{2} \text{ld} \left(1 + \frac{P_x}{P_z} \right)$$

Für $\frac{P_x}{P_z} \gg 1$ gilt:

$$H_T \approx 0,166r$$

$$C \approx 0,332Br$$

3.2.2 Zeitquantisierung

$$\text{Abtastfrequenz } f_A \geq 2f_g$$

Abstand der Abtastwerte

$$t_A \leq \frac{1}{2f_g} = \frac{1}{f_A}$$

Umsetzzeit $t_u \leq \frac{1}{2f_g}$

$$l = [0,166r] \rightarrow m = 2^l$$

$$C \geq I_{KQ} = 2f_g l H_K = f_A l H_K$$

4 Kanalkodierung

Die Anzahl an Stellen an der sich zwei Kodewörter $a_i = (u_{i1} u_{i2} \dots u_{in})$ und $a_j = (u_{j1} u_{j2} \dots u_{jn})$ unterscheiden heißt HAMMING-Distanz $d(a_i, a_j) = \sum_{g=1}^n (u_{ig} \oplus u_{jg})$
 HAMMING-Gewicht $w(a_i) = \sum_{g=1}^n u_{ig} = d(\mathbf{0}, a_i)$

HAMMING-Schranke

$$2^k \geq \sum_{i=0}^{f_k} \binom{l+k}{i}$$

Relative Redundanz $r_k = \frac{k}{n}$
 Koderate $R = \frac{l}{n}$

4.1 Eigenschaften

(n, l, d_{\min})
 allgemein $d_{\min} = f_e + f_k + 1$
 Fehlererkennungskode

$$f_e = d_{\min} - 1$$

Fehlerkorrekturkode

$$f_k = \left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor$$

4.2 Lineare Gruppenkodes

4.2.1 Eigenschaften

Erfüllen Gruppenaxiome:

1. Neutrales Element
2. Inverses Element
3. Abgeschlossenheit

4.2.2 Erzeugung

Können eindeutig durch eine Generatormatrix $G_{l \times n}$ beschrieben werden.
 Bildung Kanalkodewort

$$(a_i) = (a_i^*) \cdot G_{l \times n}$$

Kanonische/reduzierte Form der Generatormatrix $G_{l \times n} = (I_l C)$, mit I_l als $l \times l$ -Einheitsmatrix

4.2.3 Fehlererkennung

Systematischer Kode Quellkodewort kann durch Streichen redundanter Stellen aus dem Kanalkodewort entnommen werden.
 Kontrollmatrix

$$H_{k \times n} = (C^T I_k)$$

Fehlersyndrom von Kanalwort b

$$s = H \cdot b^T$$

$s = \mathbf{0} \Rightarrow$ kein Fehler.

4.2.4 Hamming-Kodes

Spezieller dichtgepackter, einfach-fehlerkorrigierender Gruppenkode mit $d_{\min} = 3$ und Kode-wort-länge $n = 2^k - 1$. Redundante Stelle k_i steht an Position 2^i im Kodewort \Rightarrow

Syndrom s liefert die Position des fehlerhaften Elements.

In Kontrollmatrix $H_{k \times n}$ steht in der i -ten Spalte der Wert $n - i + 1$ binär kodiert.

Verkürzter Hamming-Kode

Bestimmen der minimal notwendigen Anzahl an Kontrollstellen k und Streichen der überflüssigen Informationsstellen l .

Erweiterter Hamming-Kode

Ein weiteres Kontrollelement k_0 (Paritätsbit) wird hinzugefügt. $d_{\min} = 4, n \leq 2^k$. Kontrollmatrix H erhält eine zusätzliche mit Einsen besetzte Zeile und eine zusätzliche Spalte.

4.3 Zyklische Codes

- Ein Kode heißt *zyklisch*, wenn für jedes Kanalkodewort durch zyklische Verschiebung der Elemente wieder ein Kanalkodewort entsteht. Ein zyklischer Kode ist ein spezieller Linearkode, der die Gruppen- und Körperaxiome erfüllt.
- Ein zyklischer Kode wird vollständig durch ein Produkt von *irreduziblen* Minimalpolynomen, *Generatorpolynom* $g(x)$ genannt, beschrieben.
- Ein Polynom ist *irreduzibel*, wenn es nicht in ein Produkt von Polynomen zerlegbar ist.
- Das Modularpolynom $M(x)$ vom Grad $k_1 = \text{grad} M(x)$ bestimmt den Kodeparameter $n \leq 2^{k_1} - 1$.
- Der tatsächliche Wert von n berechnet sich aus dem *Zyklus der Polynomreste* über $GF(2)$ mit $x_i \text{ mod } M(x)$ ($i \in \{0, 1, \dots, p\}$) und bestimmt $n = p | 2^{k_1} - 1$
- Ist $n = p = 2^{k_1} - 1$ dann ist $M(x)$ *primitiv*.
- BCH-Kodes können zusätzlich Bündelfehler $f_b \leq k$ erkennen.

4.3.1 Kodeparameter

$$n = 2^{k_1} - 1$$

$$k_1 = \text{grad} M(x)$$

$$k = \text{grad} g(x)$$

$$l = n - k$$

$$d_{\min} = z + 1, \text{ mit } z \text{ Anzahl aufeinander folgender Nullstellen}$$

4.3.2 Bildungsverfahren

Multiplikationsverfahren

$$a(x) = a^*(x)g(x)$$

Divisionsverfahren

$$a(x) = a^*(x)x^k + r(x) \text{ mit } r(x) = a^*(x)x^k \text{ mod } g(x) \text{ (Rest bei Divison). Erzeugt immer systematischen Kode}$$

Generatormatrix

4.3.3 Fehlererkennung

$a(x) \text{ mod } g(x) = 0 \Rightarrow$ kein Fehler.

4.3.4 Kode-Konstruktion

Entwurfsabstand d_E
 $g(x) = \text{kgV}\{m_{\mu}(x), m_{\mu+1}(x), \dots, m_{\mu+d_E-2}(x)\}$
 Typischerweise $\mu \in \{0, 1\}$
 $d_{\min} \geq d_E$

Verkürzter Kode $(n, l, d_{\min}) \rightarrow (n - u, l - u, d_{\min})$, k konstant.

Erweiterter Kode $g(x)$ mit $(x + 1) = m_0(x)$ multiplizieren. $(n, l, d_{\min}) \rightarrow (n + 1, l, d_{\min} + 1)$

Zyklischer Hamming-Kode $g(x) = M(x) = m_1(x) \rightarrow d_{\min} = 3$

Abramson-Kode $g(x) = m_0(x)m_1(x) = (x + 1)M(x) \rightarrow d_{\min} = 4$